Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Exemplo — Ruína do apostador

Indivíduo inicialmente com R\$ $i \leq N$ aposta sucessivamente em sequência de jogos independentes. Em cada jogo:

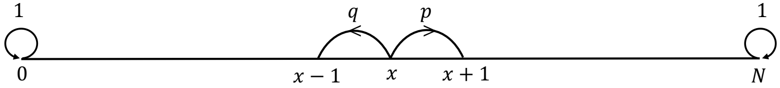
prob de ganhar R\$ 1 = p = 1−prob de perder R\$ 1.

Seja X_n = fortuna do apostador após n jogos, $n \geq 0$.

(X_n) é uma Cadeia de Markov em $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, N\}$ com as probs de transição dadas a seguir.

$$P_{00} = P_{NN} = 1;$$

$$0 < x < N\text{:}\;\; P_{x,x+1} = p;, \;\; P_{x,x-1} = 1 - p = q; p \in (0,1).$$



$0 < x < N$

Ruína do apostador (cont.)

Objetivo do apostador: obter fortuna de R\$ N e parar. Mas há a possibilidade de ruína.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ \vdots \\ \mathrm{x} \\ \vdots \\ \mathrm{N} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & \cdots & \mathrm{x} & \cdots & \mathrm{N} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & q & 0 & p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(X_n) \sim \mathrm{CM}(\delta_x, \mathbf{P}); \ \delta_x = (\delta_{xy}, \ y \in \mathcal{S})$$

Interesse:

prob de ruína do apostador $= \mathbb{P}_x(X_n = 0 \text{ para algum } n \geq 0) =: r_x$.

Ruína do apostador (cont.)

Claramente, $r_0 = 1$, $r_N = 0$. Para $0 < x < N$:

$$\begin{aligned} r_x &= \mathbb{P}_x(\text{ruína}|X_1 = x-1)\mathbb{P}_x(X_1 = x-1) \\ &\quad + \mathbb{P}_x(\text{ruína}|X_1 = x+1)\mathbb{P}_x(X_1 = x+1) \\ &\overset{\text{Markov}}{=} r_{x-1}q + r_{x+1}p \end{aligned}$$

Do que concluímos que, fazendo $\Delta_x = r_x - r_{x+1}$ e $\rho = q/p$,

$$\Delta_x = \rho\Delta_{x-1},\ x = 1, \ldots, N-1; \text{ iterando: } \Delta_x = \rho^x\Delta_0 \Rightarrow$$

$$r_y = r_y - r_N = \sum_{x=y}^{N-1} \Delta_x = \Delta_0 \sum_{x=y}^{N-1} \rho^x = s_1 \begin{cases} \frac{\rho^y - \rho^N}{1-\rho}, & \text{se } \rho \neq 1 \\ N - y, & \text{se } \rho = 1 \end{cases},$$

$0 \leq y < N$, onde $s_1 = 1 - r_1$.

Substituindo $y = 0$ acima,

$$\begin{cases} \text{a) se } \rho \neq 1 : s_1 = \frac{1-\rho}{1-\rho^N} \Rightarrow r_y = \frac{\rho^y - \rho^N}{1-\rho^N}; \\ \text{b) se } \rho = 1 : r_y = 1 - \frac{y}{N}. \end{cases} \tag{1}$$

Estratégia conservadora ou ousada?

Suponha que na situação acima $y = 50$ e $N = 100$, mas você possa escolher entre apostar R$ 1 em cada jogo ou R$ 10 em cada jogo. Qual a melhor alternativa em termos da prob de atingir o objetivo do jogo?*

Note que, para efeito de aplicar (1), o segundo caso se reduz ao primeiro com $y = 5$ e $N = 10$.

1) Se $p = 1/2$ (jogo justo): $\rho = 1$ e as duas estratégias são igualmente efetivas;

2) se $p > 1/2$ (jogo favorável): $\rho < 1$: a 1a estratégia é a melhor;

3) se $p < 1/2$ (jogo desfavorável): $\rho > 1$: a 2a estratégia é a melhor.

Obs. De fato, no caso desfavorável, a melhor estratégia é apostar R$ 50 de uma vez; no caso, favorável, melhor apostar em cada jogo o menos possível (1 centavo, digamos). No caso justo, nenhuma estratégias faz diferença.

---

*Podemos mostrar que esta prob vale $1 - r_y$, ou diretamente, com o mesmo método usado para achar r_y, ou mostrando que a prob de nunca atingir o objetivo ou ir à ruína se anula.

Comparação de desempenho de drogas

$p_i \in (0,1) =$ eficiência da droga i: % de cura, $i = 1,2$

Teste clínico: pares ao acaso de pacientes doentes

i^o membro do par recebe a droga i, $i = 1,2$ (regime duplo cego)

$$X_j^{(i)} = \begin{cases} 1, & \text{se } i^o \text{ membro do } j^o \text{ par se cura após tratamento;} \\ 0, & \text{se } i^o \text{ membro do } j^o \text{ par } \textit{não} \text{ se cura após tratamento,} \end{cases}$$

$i = 1,2$, $j \geq 1$.

Aplicam-se os tratamentos aos pares, sequencialmente até que

$$\left|(X_1^{(1)} + \cdots + X_n^{(1)}) - (X_1^{(2)} + \cdots + X_n^{(2)})\right| = M,$$

onde $M > 0$ é um número inteiro pré-estabelecido.

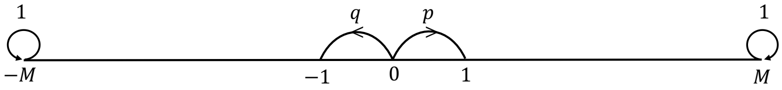
Comparação entre drogas (cont.)

Podemos ignorar os pares para os quais $X_j^{(1)} = X_j^{(2)}$; para os demais a prob de que $X_j^{(1)} - X_j^{(2)} = 1$ vale

$$\mathbb{P}(X_j^{(1)} - X_j^{(2)} = 1 | X_j^{(1)} - X_j^{(2)} = 1 \text{ ou } X_j^{(1)} - X_j^{(2)} = -1)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_j^{(1)}=1, X_j^{(2)}=0)}{\mathbb{P}(X_j^{(1)}=1, X_j^{(2)}=0) + \mathbb{P}(X_j^{(1)}=0, X_j^{(2)}=1)} = \frac{p_1(1-p_2)}{p_1(1-p_2)+(1-p_1)p_2} =: p,$$

e a prob de que $X_j^{(1)} - X_j^{(2)} = -1$ vale $q = 1 - p$. Tudo se passa de forma análoga à ruína do jogador:



Comparação entre drogas (cont.)

Seja A_M a prob de o teste terminar em M; nesse caso, poderíamos dizer que as evidências são favoráveis à droga 1. De (1) vem:

$$\mathbb{P}(A_M) = 1 - \frac{\rho^M - \rho^{2M}}{1-\rho^{2M}} = \frac{1-\rho^M}{1-\rho^{2M}} = \frac{1}{1+\rho^M} = \frac{1}{1+\left(\frac{q}{p}\right)^M} = \frac{1}{1+\left(\frac{1-p_1}{p_1}\frac{p_2}{1-p_2}\right)^M}$$

Exemplo: $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,6$, $M = 5$:

$$\mathbb{P}(A_M) = \frac{1}{1+\left[\left(\frac{6}{4}\right)^2\right]^5} \simeq 0.0170$$

Obs. 1) Nesse caso, podemos dizer que a prob de as evidências serem favoráveis à pior droga vale 0.017.

2) Se $M = 10$, então $\mathbb{P}(A_M) = \frac{1}{1+\left[\left(\frac{6}{4}\right)^2\right]^{10}} \simeq 0.0003$

Exemplo — Processo de Ramificação

Crescimento de população

$G_0 =$ tamanho inicial de uma população (geração 0)

Cada indivíduo de cada geração, independente dos demais, e de maneira identicamente distribuída, contribui certo número de descendentes para a geração seguinte.

Matematicamente: seja $\mathcal{X} = \{X,\, X_{ij},\, i,j \geq 1\}$ uma família de va's inteiras não negativas iid; G_0 va inteira nneg independente de $\mathcal{X}$.

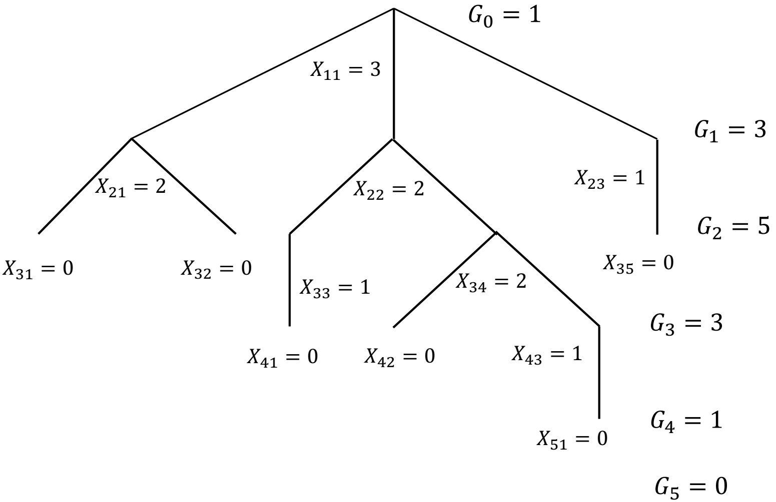
Para $k \geq 1$, se $G_{k-1} > 0$, então $G_k = \sum_{j=1}^{G_{k-1}} X_{kj}$;
se $G_{k-1} = 0$, então $G_k = 0$.

G_k é o tamanho da k^a geração da população; se $G_{k-1} > 0$, então X_{kj} é o número de descendentes do j^o indivíduo da $(k-1)^a$ geração da população, $j = 1, \ldots, G_{k-1}$.

(G_n) é uma CM$(\mu, \mathbf{P})$ em $\mathbb{N}$ com $\mu =$ distr de G_0,
$P(x,\cdot) =$ distr de $\sum_{j=1}^{x} X_{1j}$, p/$x > 0$, e $P(0,\cdot) = \delta_0$

Se $G_k = 0$ para algum $k \geq 0$, dizemos que a população *se extingue*/ ocorre *extinção* da pop; do contrário, dizemos que a população *sobrevive*/ocorre *sobrevivência* da pop.

Simulação do processo de ramificação



Obs. Esta população se extingue na 5^a geração.

Extinção

Interesse na *dicotomia* $\mathbb{P}(\text{extinção}) = 1$ ou < 1; em particular, em critério para distinguir os dois casos, e no valor da probabilidade no segundo caso.

Notemos inicialmente que, para $n \geq 0$, $\{G_n = 0\} \subset \{G_{n+1} = 0\}$, e logo

$$\mathbb{P}(G_{n+1} = 0) \geq \mathbb{P}(G_n = 0), \text{ e} \tag{2}$$

$$\{\text{extinção}\} = \cup_{n\geq 0}\{G_n = 0\} = \lim_{n\to\infty}\{G_n = 0\} \tag{3}$$

Logo,

$$\tilde{\rho} := \mathbb{P}(\text{extinção}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G_n = 0) \tag{4}$$

Para achar o limite, vamos trabalhar com funções geradoras de probabilidade. Note que

$$\mathbb{P}(G_n = 0) = \psi_n(0), \text{ onde } \psi_n(s) = \mathbb{E}(s^{G_n}) = \textstyle\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(G_n = k)\, s^k,$$

$s \in [0, 1]$, com a convenção de que $0^0 = 1$.

Função geradora de prob de G_n

Para $0 \leq s \leq 1$, temos que para $n \geq 1$

$$\psi_n(s) = \mathbb{E}(s^{G_n}) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(s^{G_n}|G_{n-1})] = \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}\big(s^{\sum_{j=1}^{G_{n-1}} X_{nj}}|G_{n-1}=k\big)\mathbb{P}(G_{n-1}=k) \quad (5)$$

A esperança condicional dentro da soma vale

$$\mathbb{E}\big(s^{\sum_{j=1}^{k} X_{nj}}|G_{n-1}=k\big) \overset{G_0, X_{\cdot\cdot}\text{ ind}}{=} \mathbb{E}\big(s^{\sum_{j=1}^{k} X_{nj}}\big) = \mathbb{E}\big(\prod_{j=1}^{k} s^{X_{nj}}\big) \overset{X_{n\cdot}\text{ ind}}{=} \prod_{j=1}^{k} \mathbb{E}\big(s^{X_{nj}}\big)$$

$$\overset{X_{n\cdot}\text{ id}}{=} \prod_{j=1}^{k} \mathbb{E}\big(s^{X}\big) = [\mathbb{E}(s^X)]^k = [\varphi(s)]^k, \quad (6)$$

onde $\varphi(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X=k)\, s^k$. Substituindo (6) em (5), temos que

$$\psi_n(s) = \sum_{k\geq 0}[\varphi(s)]^k \mathbb{P}(G_{n-1}=k) = \mathbb{E}([\varphi(s)]^{G_{n-1}}) = \psi_{n-1}\circ\varphi(s), \quad (7)$$

onde $\circ$ indica *composição*. Iterando (7), temos que

$$\psi_n(s) = \psi_{n-1}\circ\varphi(s) = \psi_{n-2}\circ\varphi\circ\varphi(s) = \cdots = \psi_0\circ\varphi^{(n)}(s), \quad (8)$$

onde $\varphi^{(n)} = \varphi\circ\cdots\circ\varphi$ (n vezes).

Obs. No caso em que $G_0 \equiv 1$, $\psi_0 =$ identidade, e, logo, em particular,

$$\varphi^{(n)}(0) = \mathbb{P}_1(G_n = 0). \quad (9)$$

$\mathbb{P}$(extinção)

De (9) e (2), para qualquer distribuição de G_0, e, em particular, para $G_0 \equiv 1$, segue que $\varphi^{(n)}(0)$ é uma sequência monotônica (não decrescente) limitada, e logo

$$\rho := \lim_{n\to\infty} \varphi^{(n)}(0) \text{ existe.} \tag{10}$$

Segue da continuidade de φ como função em [0,1] que

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \varphi^{(n)}(0) = \lim_{n\to\infty} \varphi \circ \varphi^{(n-1)}(0) = \varphi \circ \lim_{n\to\infty} \varphi^{(n-1)}(0) = \varphi(\rho),$$

e logo ρ satisfaz a equação

$$s = \varphi(s). \tag{$*$}$$

Obs. $s = 1$ é sempre solução de $(*)$.

Segue ainda da continuidade de ψ_0 que

$$\tilde{\rho} = \lim_{n\to\infty} \psi_n(0) \overset{(8)}{=} \lim_{n\to\infty} \psi_0 \circ \varphi^{(n)}(0) = \psi_0 \circ \lim_{n\to\infty} \varphi^{(n)}(0),$$

e logo

$$\tilde{\rho} = \psi_0(\rho). \tag{$**$}$$

$\rho =$ prob de extinção qdo $G_0 \equiv 1$

$\tilde{\rho} = \psi_0(\rho) = 1$ se e somente se $\rho = 1^\dagger$, logo vamos focar em ρ; em outras palavras, no caso $G_0 \equiv 1$.

Sejam $p_k = \mathbb{P}(X = k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Casos simples

i) Se $p_0 = 0$, então claramente $\mathbb{P}(G_n = 0) = 0 \ \forall \ n$, e logo

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G_n = 0) = 0.$$

ii) Se $p_0 > 0$ e $p_0 + p_1 = 1$, então, fazendo $\mathcal{T} = \inf\{n \geq 1 : \ G_n = 0\}^\ddagger$, temos que $\mathcal{T}$ é uma va Geométrica com prob de sucesso $p_0 > 0$, e logo

$$\rho = \mathbb{P}(\mathcal{T} < \infty) = 1.$$

Suposição

De agora em diante, vamos supor que $p_0 > 0$ e $p_k > 0$ para algum $k \geq 2$.

Nesse caso, φ é uma função estritamente crescente e convexa em $[0, 1]$:

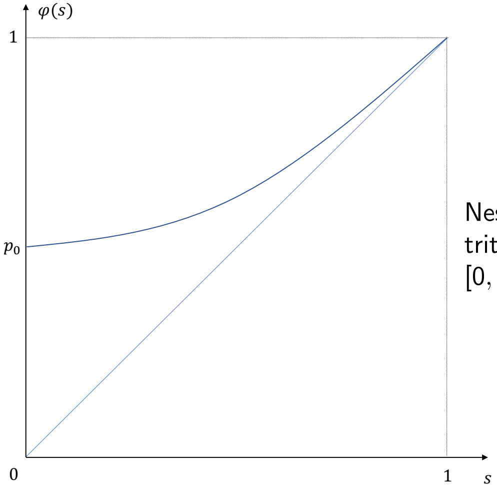
$$\frac{d^2}{ds^2}\varphi(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k s^{k-2} > 0 \text{ em } (0, 1].$$

---

†Excluindo-se o caso trivial em que $\mathbb{P}(G_0 = 0) = 1 \Leftrightarrow \psi_0 \equiv 1$.

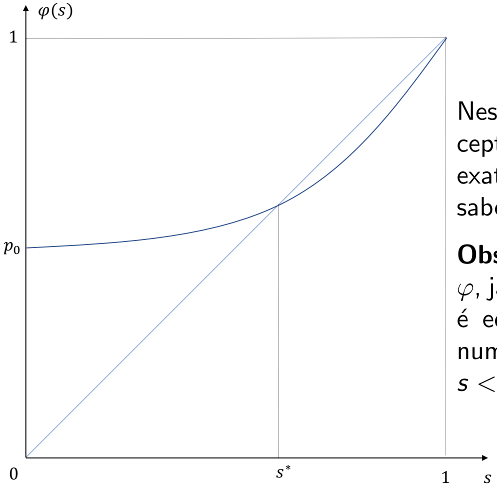
$^\ddagger\inf \emptyset \stackrel{\text{conv}}{=} \infty$

Dois casos — 1^o caso



Nesse caso, o gráfico de φ está estritamente acima da identidade em $[0, 1)$, e logo $\rho = 1$.

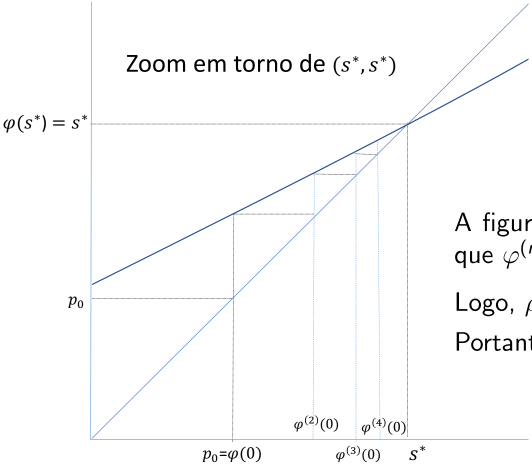
Dois casos — 2^o caso

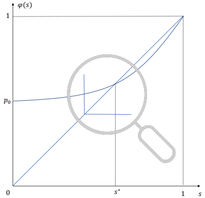


Nesse caso, o gráfico de φ intercepta o gráfico da identidade em exatamente um ponto de $[0, 1)$, a saber $s^* > 0$.

Obs. Dada a convexidade estrita de φ, já apontada acima, essa condição é equivalente a termos $\varphi(s) < s$ numa vizinhança de $s = 1$ com $s < 1$.

2^o caso — zoom em torno de (s^*, s^*)





A figura à esquerda captura o fato que $\varphi^{(n)}(0) < s^*$ para todo $n \geq 0$.

Logo, $\rho = \lim_{n\to\infty} \varphi^{(n)}(0) \leq s^*$.

Portanto, $\rho = s^*$.

(Obs. A porção do gráfico de φ na figura logo acima parece mais retilínea do que na figura no canto superior, mas se trata do mesmo gráfico.)

Teorema 1

Seja (G_n) o processo de ramificação com variável de descendência X. Seja φ a função geradora de probabilidade de X.

ρ, a probabilidade de extinção da população iniciada com $G_0 \equiv 1$, é dada pela menor solução de

$$s = \varphi(s) \qquad (*)$$

em $[0,1]$.

Dem. Os argumentos ilustrados nas figuras acima estabelecem a validade do resultado sob a suposição de que $\mathbb{P}(X=0)>0$ e $\mathbb{P}(X=k)>0$ para algum $k \geq 2$; a extensão para as demais distribuições de X (em $\mathbb{N}$) é simples (segue de i e ii do slide 14). $\square$

Exemplos

1) Suponha que $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $p_0 > 0$ e $p_2 + p_3 > 0$. Então

$$\begin{aligned} s - \varphi(s) &= s - (p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + p_3 s^3) \\ &= p_0(s-1) + p_2(s - s^2) + p_3(s - s^3) \\ &= (s-1)[p_0 - p_2 s - p_3 s(1+s)] = (1-s)(as^2 + bs - c), \end{aligned}$$

onde $a = p_3$, $b = p_2 + p_3 > 0$ e $c = p_0 > 0$.

Logo, soluções não triviais de $(*)$ $(\neq 1)$ são dadas por soluções de

$$as^2 + bs - c = 0 :$$

a) se $p_3 = 0$, então $s' := p_0/p_2$ é a (única) tal solução; logo

a.1) se $p_0 < p_2$, então $\rho = s' = \frac{p_0}{p_2} < 1$ é a solução mínima de $(*)$ em $[0, 1]$;

a.2) se $p_0 \geq p_2$, então $\rho = 1$ é a solução mínima de $(*)$ em $[0, 1]$;

Exemplo 1 (cont.)

b) se $p_3 > 0$, então a única solução não negativa de $as^2 + bs - c = 0$ é dada por

$$\frac{\sqrt{b^2+4ac}-b}{2a} = \frac{\sqrt{(p_2+p_3)^2+4p_0p_3}-(p_2+p_3)}{2p_3} =: s'' < 1$$

$$\Leftrightarrow (p_2+p_3)^2+4p_3p_0 < [(p_2+p_3)+2p_3]^2 = (p_2+p_3)^2+4p_3(p_2+p_3)+4p_3^2$$

$$\Leftrightarrow p_0 < p_2 + 2p_3$$

Logo, se $p_0 < p_2 + 2p_3$, então $\rho = s'' < 1$; se não, $\rho = 1$.

Exemplo 2: $X \sim$ Poisson (λ)

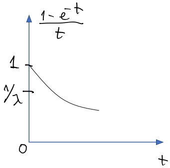
$$\varphi(s) = e^{-\lambda(1-s)}$$

Lembre que o 2^o caso é equivalente a $\varphi(s) < s = 1 - (1-s)$ para algum $s < 1$ (vide observação no slide 16), o que equivale a

$$\frac{1-e^{-\lambda(1-s)}}{\lambda(1-s)} > \frac{1}{\lambda} \text{ numa vizinhança de 1 com } s < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-e^{-t}}{t} > \frac{1}{\lambda} \text{ para } t \text{ numa vizinhança positiva de 0}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \searrow 0} \frac{1-e^{-t}}{t} = 1 > \frac{1}{\lambda} \; .$$



Concluímos que, se $\lambda > 1$, então $\rho < 1$; se $\lambda \leq 1$, então $\rho = 1$.

Como sempre, ρ é a solução mínima de $\varphi(s) = s$ em $[0,1]$, o que nesse caso, significa a solução mínima de $e^{-\lambda(1-s)} = s$ em $[0,1]$.

No caso em que $\lambda > 1$, acabamos de ver que tal solução é < 1, mas não temos uma solução explícita, como no exemplo anterior.

Nesse e noutros casos em que não tenhamos acesso explícito a ρ, mas sim a φ, podemos obter ρ de forma aproximada fazendo a iteração $\varphi^{(n)}(0)$ para n bastante grande.

Critério para decidir qual o caso

Vamos a seguir obter um critério para diferenciar entre os dois casos delineados nos slides 15 e 16 (vamos supor que $p_0 > 0$ e $p_k > 0$ para algum $k \geq 2$).

Caso 1

Nesse caso, temos que $\varphi(s) > s$ para todo $s \in [0,1)$; como φ é continuamente diferenciável em $[0,1]$, segue que

$$\frac{1-\varphi(s)}{1-s} = \frac{\varphi(1)-\varphi(s)}{1-s} < 1 \; \forall \; s < 1 \Leftrightarrow \varphi'(1) = \lim_{s \nearrow 1} \frac{\varphi(1)-\varphi(s)}{1-s} \leq 1.$$

Caso 2

Nesse caso, temos a existência de $s^* < 1$ tq $\varphi(s^*) = s^*$, e da continuidade de φ', do Teorema do Valor Intermediário segue a a existência de $\tilde{s} \in (s^*, 1)$ tq $\varphi'(\tilde{s}) = \frac{\varphi(1)-\varphi(s^*)}{1-s^*} = \frac{1-s^*}{1-s^*} = 1$, e da convexidade estrita de φ, que implica que φ' é estritamente crescente em $[0,1]$, segue que

$$\varphi'(1) > \varphi'(\tilde{s}) = 1.$$

Critério

Finalmente, da observação que

$$\varphi'(1) = \sum_{k=1} kp_k s^{k-1}\Big|_{s=1} = \sum_{k=1} kp_k = \mathbb{E}(X),$$

temos o seguinte resultado.

Teorema 2

Seja (G_n) o processo de ramificação com variável de descendência X. Seja φ a função geradora de probabilidades de X.

Supondo que $\mathbb{P}(X = 1) < 1$, temos a seguinte dicotomia.

i) Se $\mathbb{E}(X) \leq 1$, então $\rho = 1$.

ii) Se $\mathbb{E}(X) > 1$, então $\rho < 1$.

Dem. Os argumentos acima estabelecem o resultado sob a suposição de que $\mathbb{P}(X = 0) > 0$ e $\mathbb{P}(X = k) > 0$ para algum $k \geq 2$. Os demais casos são mais simples, e seguem imediatamente de i e ii do slide 14. $\square$

Obs. Verifique a consistência desse critério com as conclusões nos Exemplos 1 e 2 acima.

Valor esperado de G_n

Lembremos que para uma va inteira não negativa Z com função geradora de probabilidades $\phi : [0,1] \to [0,1]$, $\phi(s) = \mathbb{E}(s^Z)$, valem

$$\phi(1) = 1 \quad \text{e} \quad \mathbb{E}(Z) = \phi'(1) := \lim_{s \nearrow 1} \phi'(s).$$

Disso, de (8) e da regra da cadeia, segue que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(G_n) &= \psi_0' \circ \varphi^{(n)}(1) \times \varphi' \circ \varphi^{(n-1)}(1) \times \cdots \times \varphi'(1) \\ &= \psi_0'(1) \times \varphi'(1) \times \cdots \times \varphi'(1) = \mathbb{E}(G_0)\, \nu^n,\end{aligned}$$

onde $\nu = \mathbb{E}(X)$.

Obs. 1) Se $\nu < 1$, dizemos que o processo de ramificação está na *fase subcrítica*. Nesse caso $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(G_n) = 0$ exponencialmente rápido; disso e da $\neq$ de Markov:

$\mathbb{P}(G_n > 0) = \mathbb{P}(G_n \geq 1) \leq \mathbb{E}(G_n) \to 0$ (exponencialmente) quando $n \to \infty$,

e segue que $\rho = 1$ (o que fornece um argumento alternativo para o Teorema 2.i quando $\nu < 1$).

Obs. (cont.)

2) Na *fase crítica*, em que $\nu = 1$, também temos, pelo Teorema 2 acima[§], que $\mathbb{P}(G_n > 0) \to 0$ quando $n \to \infty$, mas, sob condiçõess relativamente brandas[¶], o decaimento é polinomial: $\mathbb{P}(G_n > 0) \sim \frac{\text{const}}{n}$.

3) Na *fase supercrítica*, em que $\nu > 1$, $\mathbb{E}(G_n)$ cresce exponencialmente rápido[‖]. De fato, podemos mostrar[**] que

$$W = \lim_{n\to\infty} \frac{G_n}{\nu^n}$$

existe quase certamente, e que, sob condiçõess brandas[††], temos que

$$\mathbb{P}(W > 0) = 1 - \tilde{\rho} = \mathbb{P}(\text{sobrevivência}),$$

do que se conclui que quando há sobrevivência, a população cresce exponencialmente rápido (com o número de gerações):

$$G_n \sim W\nu^n \text{ qc.}$$

[§] no caso não trivial

[¶] $\mathbb{E}(X^2) < \infty$

[‖] sempre que $G_0 \not\equiv 0$; suponhamos também que $\nu < \infty$

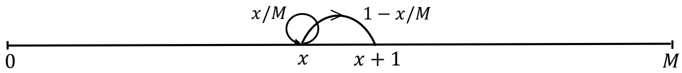
[**] por métodos que vão além do escopo deste curso

[††] $\mathbb{E}(X \log X) < \infty$

Exemplo — Colecionador de figurinhas

Um álbum é composto de M figurinhas distintas. Um colecionador adquire sucessivamente uma figurinha ao acaso por vez entre as M possíveis. Qual é o número esperado de aquisições até o álbum ser completado?

Seja $X_0 = 0$ e $X_n =$ o número de figurinhas distintas na coleção após n aquisições. Então (X_n) é uma CM com probabilidades de transição como ilustrado a seguir.



$0 \le x \le M$

Álbum de figurinhas (cont.)

Seja N_x o número de aquisições até a obtenção de uma figurinha nova quando a coleção contém x figurinhas distintas. Então

$$N_x \sim \text{Geométrica com prob de sucesso } 1 - x/M.$$

Queremos então

$$\mathbb{E}(\textstyle\sum_{x=0}^{M-1} N_x) = \sum_{x=0}^{M-1} \mathbb{E}(N_x) = \sum_{x=0}^{M-1} \frac{1}{1-x/M} = \sum_{x=0}^{M-1} \frac{M}{M-x}$$

$$= M \textstyle\sum_{x=0}^{M-1} \frac{1}{M-x} = M \sum_{x=1}^{M} \frac{1}{x} \sim M \log M.$$